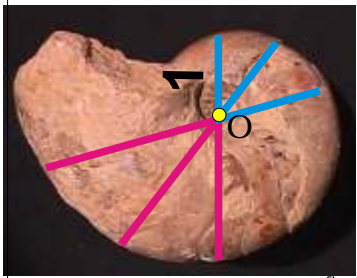


TRACÉ D'UNE SPIRALE LOGARITHMIQUE au nombre d'or

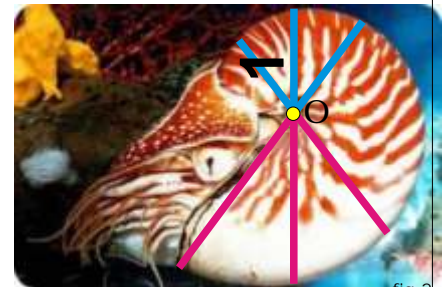
Les notions de géométrie utilisées sont élémentaires et ce tracé ne requiert aucune connaissance mathématique particulière. Soyez confiants, plongez dans la démonstration mais avant il est bon de lire et de comprendre l'article "Jouez avec le nombre d'or" écrit pour des enfants guidés par un enseignant.

En quarante ans d'enseignement (de l'apprenti à l'ingénieur) j'ai constaté que les jeunes doués accèdent facilement à l'abstraction nécessaire pour aller loin en mathématique. D'autres, très nombreux, n'y parviennent que si au départ une approche concrète et motivante les accroche. La géométrie est une de ces motivations. Je constate aussi qu'aujourd'hui pour la très grande majorité des internautes = ke^a ne représente rien. C'est ainsi. Une démonstration géométrique, plus concrète, est admissible par un plus grand nombre. J'ai décidé de réaliser ce tracé pour les "non-matheux" avec l'espoir qu'ils le deviennent.



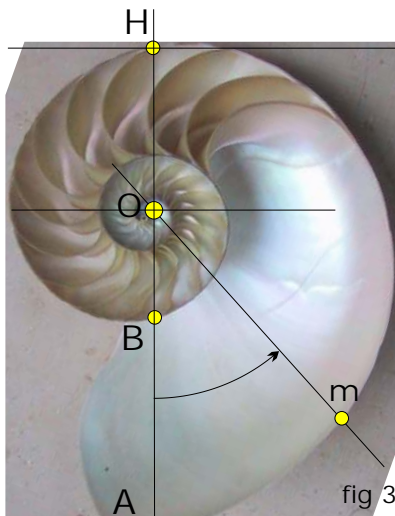
Depuis longtemps, j'ai remarqué sur des photos de très nombreux nautes, que sur toute droite passant par leur centre O, leur contour engendre, un rapport qui est ≈1,618... le nombre d'or .

Nous allons construire ce contour en spirale avec ces rayons et l'aide visuelle de la fig 3, ce qui nous donnera quelques points de cette courbe.

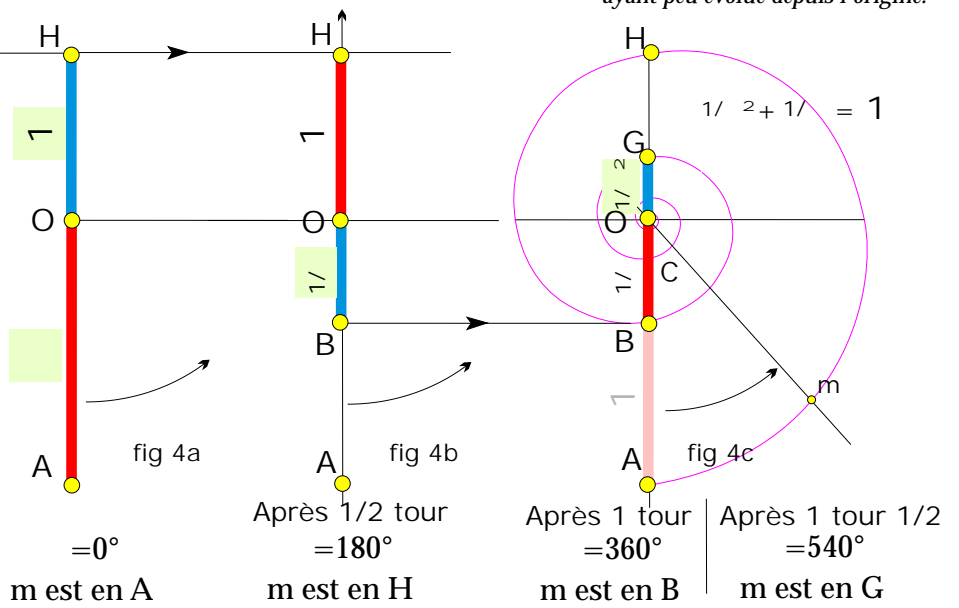


Nautilus vivant aujourd'hui au fond de l'océan Pacifique Sud, en nombre réduit, ayant peu évolué depuis l'origine.

Nautilus fossilisé d'environ 200 millions d'années (col. Hervé Châtelier)



Nautilus en coupe, m est un point du contour. Si augmente, Om diminue.



Nous voyons apparaître la suite de Fibonacci fig 4 c,b,a (Voir "Jouez avec le nombre d'or") : $1/2^2 - 1/2 - 1 -$ que nous savons tracer à la ficelle (ou au compas) et qui nous a permis de déterminer OB et OG

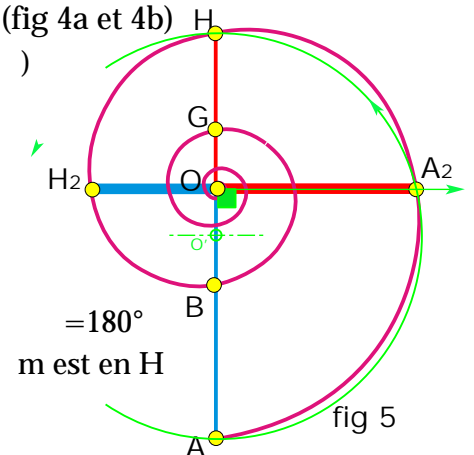
La décroissance de Om, fonction de l'angle est = AB = 1 en un 1/2tour (fig 4a et 4b) et $AB + HG = 1 + 1/2 = 3/2$ en un tour. (fig 4a et 4c avec $HG = HO - GO = 1/2$)

— Pour 1/4 de tour, = 90° (fig 5)

Le rayon vecteur OA₂ est la moyenne géométrique de OH et OA*, nous l'obtenons en traçant en vert le cercle de diamètre AH et de centre O' qui coupe la perpendiculaire en O à AH, c'est le point cherché : A₂

Pour OH₂ nous savons qu'il doit être, $OA_2/2$. Il ne reste plus qu'à déterminer A₁ par la moyenne géométrique de OA et OA₂, puis A₃...

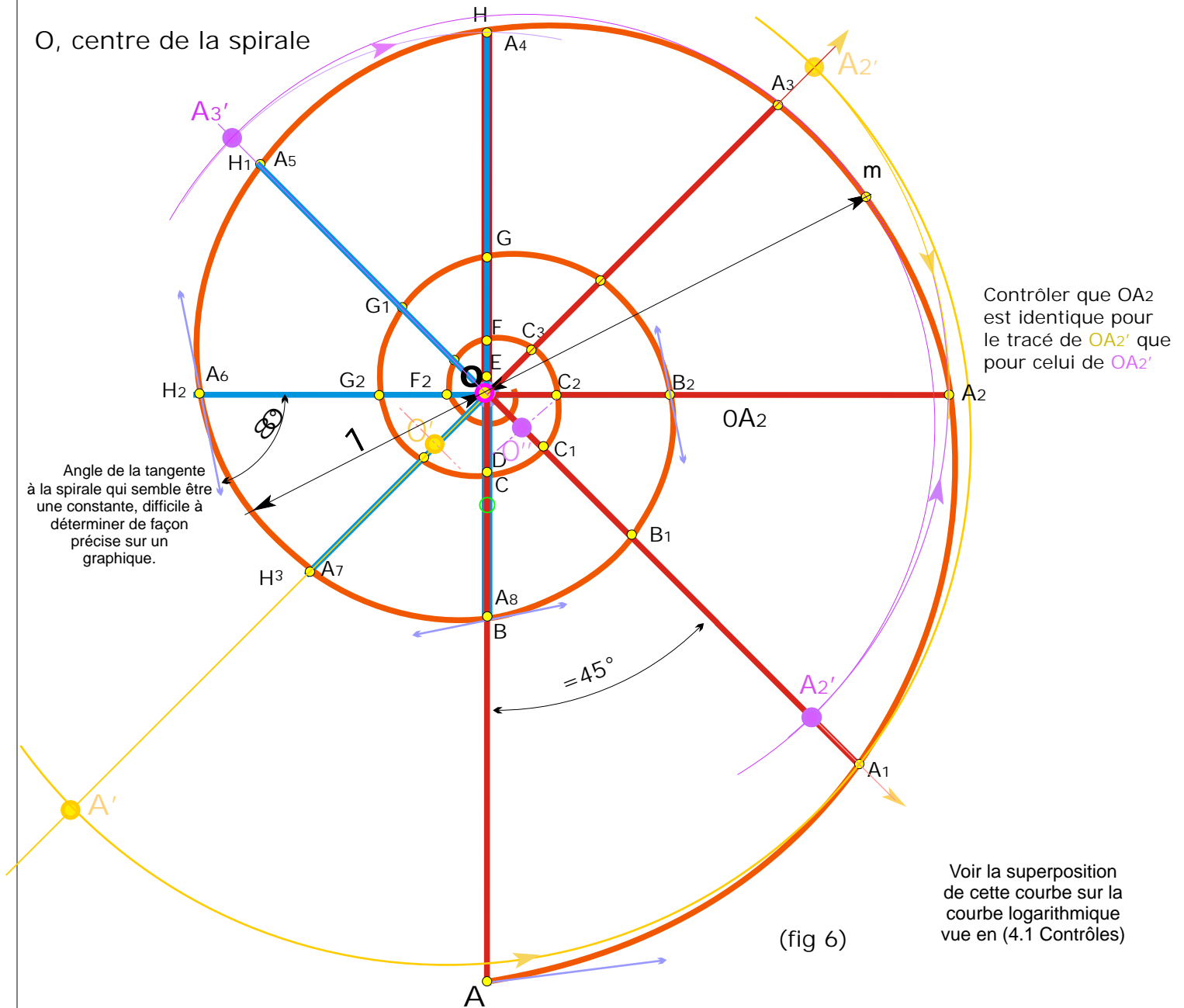
Faisons ce tracé à plus grande échelle (fig 6) et traçons la décroissance pour = 45° et 135° afin d'avoir suffisamment de points pour tracer la spirale



*Voir justification de ce tracé de la moyenne géométrique (page 27)

(Veiller à l'échelle 100% du format .pdf)

O, centre de la spirale



Voir la superposition de cette courbe sur la courbe logarithmique vue en (4.1 Contrôles)

(fig 6)

Sur un axe vertical, faire le partage de AH de grandeur quelconque, en moyenne et extrême raison, avec une ficelle (ou compas). Appeler O le point de partage et par O tracer un axe horizontal.

ou, pour simplifier et faciliter les contrôles, porter OA = 100mm et OH = 61,8 mm d'où AH = 161,8 mm

Avec fig. 5 page précédente, retracer les points de A et A2, H2 et B2, G2 puis : C2, F2, avec la suite de Fibonacci.

-1/8 de tour : (fig 6) = 45°, le rayon jaune est la bissectrice intérieure de AOA2. La bissectrice extérieure lui sera perpendiculaire. C'est sur elle que nous rabattons les rayons OA et OA2 d'où A' et A2'

Le cercle jaune de diamètre A'A2 coupe la bissectrice intérieure au point cherché : A1
Le rayon OA1 est la moyenne géométrique des rayons OA et OA2 (OA2 va intervenir dans le prochain tracé

-3/8 de tour : (fig 6) = 135° Faire de même avec le tracé violet pour trouver A3 sur la bissectrice intérieure de l'angle HOA2

Voir page suivante comment déterminer les rayons vecteurs associés.

Remarque importante : Le rapport à phi est bien là dans cette spirale mais c'est une spirale.

L'équation mathématique permet de trouver toutes les spirales possibles.

Si vous le pouvez, faites tracer par l'ordinateur des spirales avec les rapports 1,5 puis 1,8. et 1,618 pour contrôler par superposition le maximum de photos, coupes, radiographies... de nautilus.

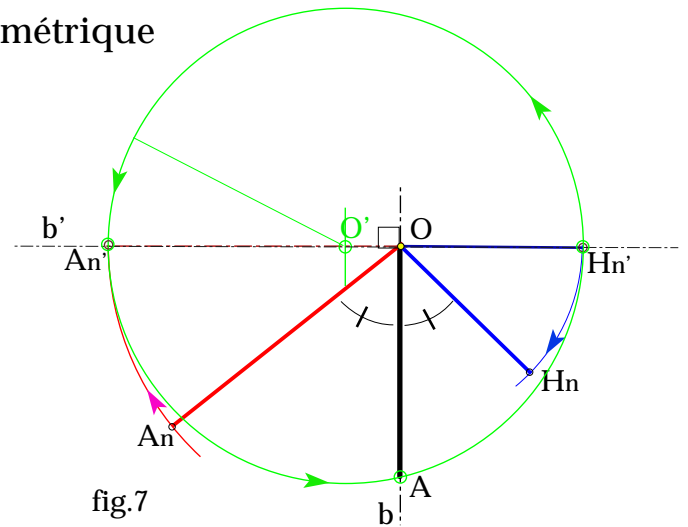
Nous pourrions le faire par la géométrie mais il faut reconnaître la grande supériorité des mathématiques. Notre solution n'aura été là que pour faire agir, comprendre et donner envie.

Tracé des rayons vecteurs Om sans calcul de la fig 6 (page 26)

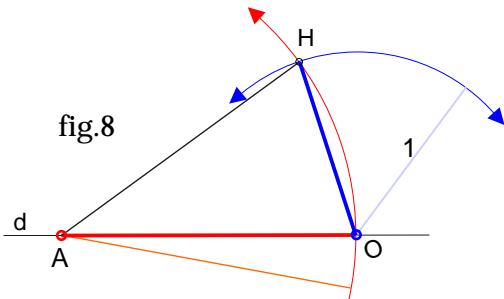
Gardons la logique du départ : observons la "décroissance", établie fig 4. (page 25)

1 — Justification du tracé de la moyenne géométrique

Lorsqu'on divise un angle en 2, un rayon vecteur sur la bissectrice est une moyenne des rayons vecteurs sur les cotés de cet angle. Pour une spirale logarithmique Il faut que $OA/OH_n = OA_n/OA$, d'où $(OA)^2 = OA_n \cdot OH_n$, c'est donc la moyenne géométrique des rayons vecteurs des cotés d'où le tracé classique de la fig.7 : Angle : A_nOH_n , Rayons vecteurs : OA_n et OH_n , rabattus sur la bissectrice extérieure (b'). Le **cercle vert** de diamètre A_nH_n coupe la bissectrice (b) en A, le point recherché. OA est la moyenne géométrique de OA_n et OH_n



2 — Déterminer graphiquement les rayons associés de valeur Om /.



Pour le tracé fig 6 : AO et OH sont donnés

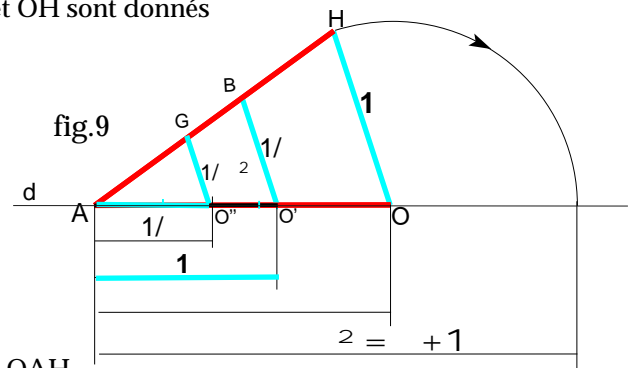


fig.8 — Sur la droite (d), le point A, centre de l'arc de **cercle rouge** de rayon F qui coupe (d) en O. De O centre de l'arc de **cercle bleu** de rayon 1 qui coupe le rouge en H et détermine le triangle isocèle OAH dont le côté et la base sont dans le rapport F. Toute droite parallèle à OH définira un nouveau triangle avec la même propriété Côté/base = 1,618... (C'est le tracé du triangle «sublime» page 4 de l'article pour Futura-Sciences)

fig. 9 — Il suffit de reporter OH sur (d) à partir de A puis tracer OB. Reporter OB sur (d) à partir de A puis tracer OG et l'on retrouve la suite géométrique de raison F dite de Fibonacci. de la page 25 (fig 4) Pour les valeurs de OA_1 , OA_2 et OA_3 déterminées fig 6 les reporter sur (d) à partir de A et relever la valeur du vecteur associé pour construire les points de la spirale.

fig. 10 — Les vecteurs associés sont à l'échelle de la fig 6 (page 26) Ce tracé donne les valeurs de tous les vecteurs associés sans aucun calcul avec la précision que permet un compas ou une corde pour de grands tracés (fer forgé, déco...)

Remarque :

Il existe d'autres tracés de spirales au nombre d'or que vous trouverez dans le chapitre 6 (page 49 à 55) que j'ai imaginé et réalisé pour le livre de R. Vincent, « Nombre d'or et créativité », notamment page 54. La spirale en couverture de « N'or et mathématique » correspond au tracé page 53 de ce chapitre.

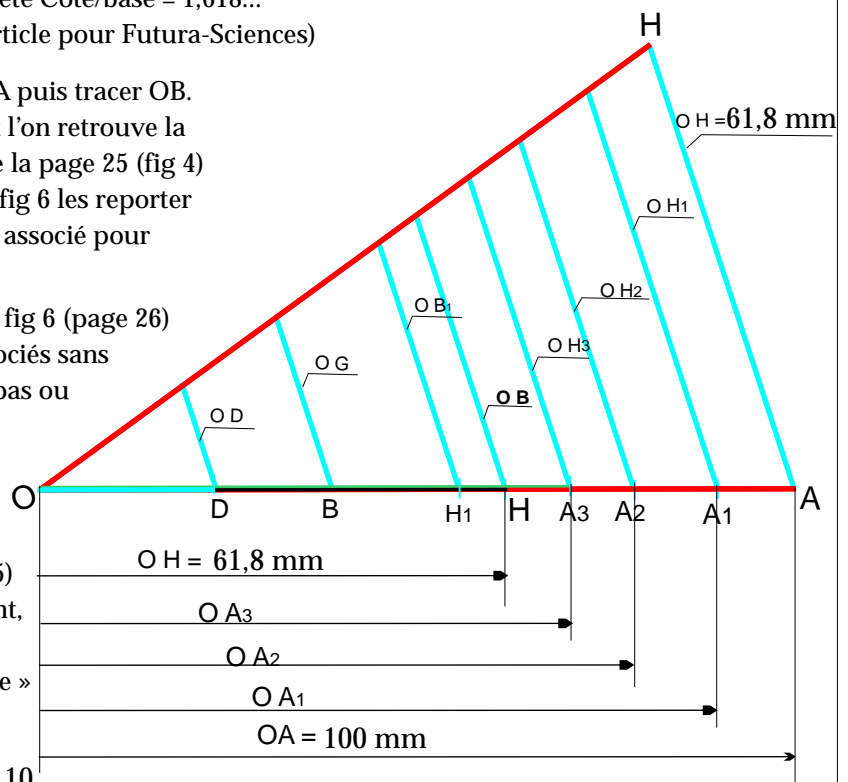


fig.10

1/3 — *Cet article a été classé comme d'Importance élevée — Nombre d'or fait partie du projet Mathématiques*, Cette information (voir O.1 Wikipédia) m'a poussé à inclure dans mes réponses mon point de vue sur l'enseignement des mathématiques. Sujet important qui concerne tout le monde.

Remarques sur l'enseignement des maths.

L'abstraction est nécessaire pour toute personne (jeune ou non) qui désire une formation sérieuse en math. C'est indiscutable. Mais tous les enfants y accèdent-ils aisément ? Comment peut-on aider l'acquisition de cette faculté d'abstraction ? Mais, commencer l'étude des maths par le concret, n'est-ce pas un frein pour les plus doués ?

J'ai quelques réponses forgées par une expérience de 40 ans d'enseignement (que je suis malheureusement obligé de mettre en avant pour donner quelque crédibilité à mon texte), qui fût du niveau CAP au niveau ingénieur et qui a été dispensé en dessin industriel (géométrie descriptive et résistance des matériaux) en mécanique, en déformation plastique et en automatismes industriels pour des élèves, étudiants ou stagiaires de 16 à 50 ans. Et, outre le Capet j'ai fait "math génie" au CNAM à Lyon et un stage à Sophia Antipolis pour la déformation plastique, d'un assez haut niveau. A cela il faut ajouter sept années d'expérience professionnelle en atelier puis en bureau d'études.

En effet, cette longue expérience m'a permis de constater que l'accès à l'abstraction n'est pas donné à tout le monde tant s'en faut et que pour certains jeunes la mémoire supplée la compréhension et fait illusion.

Un cours de mathématiques ne sera évidemment pas le même dans les filières scientifiques où il faut des jeunes aptes à l'abstraction que dans les filières techniques où le concret, au départ, est tellement plus efficace. Et dans les autres domaines comme lettre, histoire... je pense que l'étude de cas réels pris dans la nature pourrait amener des jeunes vers des métiers techniques ou scientifiques dont on manque tant.

La compréhension peut être atteinte, avant l'engagement dans une filière déterminée, en débutant les maths par des réalités contrôlables pour MOTIVER.

Commencer, par exemple, avec des végétaux sur lesquels l'enfant peut compter les écailles, les spires, les aiguilles... ou mesurer des éléments pour établir des rapports... Il peut contrôler, ajouter... puis après une démonstration géométrique simple, comprendre. Ce qui permet de nommer chaque grandeur par une lettre, chaque opérateur par un symbole... L'enfant est heureux d'avoir compris et il peut faire de la théorie avec des expressions littérales car elles ont pris un sens (comme $X^2 - X - 1 = 0$ page 7 de "jouez avec le nombre d'or") puis des formules voisines, les appliquer dans un autre domaine pour en prouver l'utilité. La connaissance de l'abstrait est ainsi amorcée. Les exemples réels ne manquent pas dans : la nature, l'art, les objets usuels, les produits manufacturés....

L'abstraction mathématique est une spécificité humaine, comme le rêve poétique ou l'activité créatrice. Aucune hiérarchie ne peut exister entre ces spécificités et l'appartenance exclusive à l'une d'elle est assez rare. Nous sommes tous plus ou moins scientifique ou artiste, plus ou moins poète ou créateur industriel. Certains ont grand besoin des mathématiques d'autres absolument pas. C'est ainsi.

L'acquisition des mathématiques, par exemple les fonctions algébriques, la trigo... de façon abstraite pour tous, laisse de nombreux jeunes sur le bord de la route, se demandant : à quoi ça sert ?

Pourquoi des élèves à un moment donné décrochent ? Ce n'est pas nécessairement par manque d'intelligence c'est pour moi une question de présentation qui aurait pu créer la motivation. La géométrie en est une.

L'intelligence elle-même fonctionne mieux sous la magie d'une motivation.

Quelle est la réalité aujourd'hui pour la majorité des internautes ? (La mémoire du jeune s'estompe avec le temps).

Que représente pour eux : $Om = k \exp [/180x \ x1/\tan()]$... rien. C'est une des formes de l'équation d'une spirale logarithmique mais, que sont réellement ces mots, logarithmique, log népérien, qu'est-ce que "exp", "tan" ? Comment leur prouver qu'une telle spirale peut être construite simplement et quelle est bien au nombre d'or ?

C'est la raison pour laquelle j'ai réalisé l'étude, qui n'a peut-être pas de précédent, pour montrer que même le tracé d'une spirale logarithmique peut se faire avec une ficelle, sans calcul. Comme je l'ai dit par ailleurs, ce tracé
« n'aura été là que pour faire agir, comprendre et donner envie » autrement dit pour **MOTIVER**.

Reste une dernière question : Un enfant surdoué va-t-il être gêné ou retardé par l'examen de cas concrets au début de sa scolarité ? Je n'ai pas la réponse parce que je n'ai jamais pu "l'expérimenter" et n'ayant pas été un enfant surdoué, je ne l'ai même pas vécu. Je pense que s'il est vraiment doué, il doit pouvoir s'en remettre.

Si vous avez une opinion basée sur votre vécu ou sur votre expérience n'hésitez pas : rc@chalagam.com

Si vous avez une citation crédible sur ce sujet en indiquant sa source, communiquez la.

Si c'est une idée qui vous vient de l'impression que vous avez ressentie, c'est moins intéressant mais vous pouvez la communiquer et si vous êtes nombreux, cela permettra de faire un sondage singulier sur le sujet.

Difficultés de la pédagogie en sciences en fonction du public concerné.

Son rôle (pour moi) : Faire comprendre, à un très large public, un “tracé”, un “phénomène”, un “événement”... , dont l'exposé nécessite des connaissances mathématiques et scientifiques qui souvent lui sont inconnues. Inconnues parce que d'un domaine étranger ou d'un niveau de spécialistes avec un vocabulaire très précis.

Son but : Satisfaire une curiosité légitime en respectant l'esprit et la finalité du “tracé”, ou du “phénomène” et donner envie, à ce large public que sont les internautes, d'en savoir plus. Éveiller la curiosité.

Quel est le problème au sujet de ce “Tracé” ?

Définir si la forme spiralée d'une coquille de mollusque est ou n'est pas “au nombre d'or” par :

— soit une méthode purement scientifique avec repérage précis de suffisamment de points de la forme étudiée puis voir si elle peut être ajustée par une spirale logarithmique et enfin si le nombre d'or est une fonction d'un paramètre de cette spirale ($r = e^{t \tan \alpha}$) ce qui n'est pas envisageable dans ce contexte.

— soit par un tracé géométrique (rendu accessible au public visé*) qui permet d'obtenir une spirale définie qui soit un résultat contrôlable afin que le plus grand nombre comprenne ce qu'est une spirale, ses paramètres et pourquoi elle est ou non au nombre d'or. Et que cette expérience les incite à vouloir en savoir plus.

*par la lecture et la compréhension de “jeux nombre d'or” au moins jusqu'à la page 8

Appel aux mathématiciens et scientifiques pour ce tracé

Je sais que certains n'essayeront même pas d'entrer dans ce tracé à la simple vue de la présentation et des premiers tracés. S'il vous plaît, oubliez vos maths, vos raisonnements, entrez dans le jeu.

M'adressant à ceux qui n'ont plus, ou jamais eu (ou rejeté) une culture mathématique, mes mots et mon approche seront nécessairement différents des langages et approches habituels des mathématiciens.

Il est important que celui qui écoute comprenne tout ce qui est dit.

Bien sûr j'aurais pu adopter des axes orthonormés Ox , Oy et placer le centre de la spirale en O et faire que l'équation polaire puisse s'appliquer “normalement” avec Om formant l'angle avec Ox ...

Bien sûr j'aurais pu considérer la croissance naturelle de Om (du mollusque) au lieu de sa décroissance...

Mais, regardez en (4.4 Tracé) fig 6, le nautilus vivant, dans sa position naturelle que j'ai conservée fig 3 ce qui permet de passer à la fig 4a et d'être facilement compris.

Nous avons pris l'axe vertical passant par le centre en fin de croissance et porté notre rapport $AO/OH = \dots$.

On fait un demi tour puis le tour complet on suit le déplacement de “m” sur le contour, en fonction de \dots .

On peut voir, on peut mesurer la décroissance de Om . Comment aurais-je fait pour partir sur la fig 4a avec des rayons AO , OH , tout petits (lesquels ?) et suivre leur croissance ? ce n'est pas imaginable.

En physique, l'apprentissage de la chute des corps se fait sans tenir compte de l'air, du lieu, de la forme du corps... pour comprendre le phénomène. L'enfant qui résout ses calculs ne sait pas qu'ils sont faux.

Ensuite (bien plus tard) on dit : il y a de l'air, du vent, on est en tel lieu... les paramètres qui interviennent apparaissent graduellement et on apprend à en tenir compte. Pourquoi pas là ?

Je voulais rester dans le seul domaine géométrique et réaliser une spirale logarithmique la plus simple possible et pour cela, comme me l'a dit après coup Pierre Arnoux (voir *p.24)

« La manière la plus simple est de la remplacer par une fonction linéaire par morceaux, c'est-à-dire de faire une interpolation linéaire, et c'est ce que vous faites. C'est aussi ce qu'on faisait autre fois quand on utilisait les tables de logarithmes, et qu'on cherchait une valeur avec plus de précision que le pas de la table. C'est parfaitement correct, tant que l'on rappelle que c'est une valeur approchée, et il est clair qu'avec la définition donnée par un écran, la différence est presque invisible. »

Je n'avais pas précisé que mon tracé était «approché» et mon contrôle avec le graphe de la spirale de l'ordinateur étant à mes yeux satisfaisant j'ai même pensé que la suite de raison ϕ remplaçait l'interpolation linéaire, ce qui n'est pas le cas.

Pédagogiquement je crois que ce tracé nouvellement mis en ligne et l'ancien, expliqué page 28, sont plus formateur qu'avant. De toute façon les deux sont exprimés de façon mathématiquement correcte.

3/3

Par les superpositions successives (4.1 contrôle) je montre la concordance de notre tracé avec le graphe obtenu par l'équation d'une spirale logarithmique dorée et je montre l'écart existant entre les mathématiques et la nature où il n'y a que des entiers positifs et où les formes vivantes ne sont jamais parfaites (droites cercles...) ni identiques.

Le contrôle statistique ne permet qu'une meilleure approximation des formes du nautilus et je le dis (4.1 à 4.3.) L'ajustement par une courbe mathématique ne précisera que la forme étudiée, pas la famille à laquelle elle appartient ; il faudra aussi les statistiques pour savoir si y est présent.

Le plus grand nombre des internautes comprendra mieux s'il est passé par le tracé géométrique même s'il n'a pas tout compris du tracé mais s'il a pu vérifier (surtout avec le compas de proportion) ce qui est annoncé.

Parlons aussi et surtout de ceux qui n'ont pas eu la chance de faire des études, et ils sont très nombreux, parmi eux il y a des "curieux intelligents" qui aimeraient, aujourd'hui, comprendre pour pouvoir peut-être aller plus loin... mais il faut commencer par les intéresser.

Seule une expérimentation bien menée peut confirmer ou infirmer mes remarques (qui sont tout de même basées sur une longue et continue recherche personnelle. Les exemples ressacés n'apportent rien, je les ai toujours évités dans mes écrits sur le nombre d'or ou sur la couleur. Je préfère l'expérimentation directe).

D'une façon plus générale : Vous le savez, je le sais mais d'autres lisant ces pages doivent comprendre !

Le nombre entier est la seule façon d'exprimer directement les éléments de la nature. Le zéro, la virgule, les nombres négatifs, les fractions... sont des inventions de l'homme... bien utiles pour résoudre nos problèmes.

Mais les inventions se multiplient pour les nombres, pour les opérateurs et leurs symboles, pour l'expression des surfaces, des formes, ce qui a été rendu nécessaire pour suivre la réalité des progrès de la science et des nouvelles avancées des nanosciences, du numérique, de la physique quantique...

Les sciences cognitives, c'est à dire les sciences étudiant l'acquisition du savoir (plus sa mémorisation et sa transmission !), en tenant compte de tellement de paramètres (intelligence ?, comportement, gènes, langage, environnement, raisonnement, état psychologique, culture...) ont rendu leurs conclusions tellement complexes qu'elles sont encore loin d'être définissables et encore moins applicables.

Nous sommes aujourd'hui dans une jungle de l'abstraction que seuls les spécialistes (et chacun seulement dans son domaine) peuvent dominer. Que peut comprendre (sans dominer) le plus grand nombre des internautes, et on peut dire des citoyens, que nous sommes ? Cette relation nécessaire pour l'étude scientifique de la couleur : *sous certaines conditions le flux lumineux F_v est : $F_v = K_m \int_0^\infty F_e$, $V(\)$ d ne parle qu'aux initiés.*

Il faudrait aujourd'hui que les internautes curieux puissent accéder à ces connaissances sans avoir l'obligation "d'ingurgiter" toutes les détails de l'apprentissage de chaque voie.

Quelques sondages autour de moi m'ont appris que dans une grande proportion des gens interrogés, à partir de 35 ans, la culture littéraire, historique, artistique auraient plutôt progressé depuis leurs études mais que la culture mathématique n'est souvent qu'un lointain souvenir et quelque fois, pour eux, pas très enthousiasmant.

C'est malheureux mais il en est de même pour les sciences. Faites en vous même l'expérience.

Que doit-on faire devant cet article de Wikipédia qui — a été classé comme d'Importance élevée — dans les plus lus en France — et que "Nombre d'or" fait partie du projet Mathématiques.? (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Nombre_d%27or ou, voir O.1 Wikipédia)

Ce jour (24 avril 2009), je reçois le n°59 de "Research*eu" et page 33 je lis de la plume de Pierre Deligne professeur à "l'Institute for Advanced Study" de Princeton (Prix Wolf de mathématiques - médaille Fields...) : «Pour moi, voir les façons dont différentes personnes présentent la même chose, cela donne plusieurs points de vue différents, et du choc des points de vue jaillit la lumière!» P. Deligne est pour la confrontation géométrie-algèbre.

Une lumière jaillira peut-être de notre exemple, cela montre cependant que c'est au moins recevable.